Université Paris-Diderot — Année 2013-2014

MM1 - Algèbre et analyse élémentaires I

Feuille de TD 1 - Les nombres complexes

Exercice 1. Calculer le module et un argument des nombres complexes suivants.

(a) $-3\sqrt{2}$, (b) $(1-\mathrm{i})^9$,

(c) $(\sqrt{5}-\mathrm{i})(\sqrt{5}+\mathrm{i})$, (d) $e^{3+4\mathrm{i}}$.

Exercice 2. Déterminer les nombres complexes z tels que :

(a) $|\overline{z}-\mathrm{i}|=1$, (b) $z^2=\overline{z}$,

(c) $z\overline{z}=z^3$, (d) $\mathrm{i}\,\mathrm{Re}\,z^2-\mathrm{Im}\,z^2=z$,

(e) $z^2+\overline{z}-1$ est réel, (f) $z^2+2\overline{z}-2$ est imaginaire pur,

(g) $\arg(z+2\overline{z})=\frac{\pi}{3} \mod 2\pi$.

Exercice 3. Soient $z_1=3\sqrt{2}(1+\mathrm{i})$, $z_2=\sqrt{3}+\mathrm{i}$.

(a) Déterminer les formes exponentielle et trigonométrique de z_1 et z_2.

(b) Déterminer la forme cartésienne de $z=\frac{z_1}{z_2^2}$.

(c) Déterminer les formes exponentielle et trigonométrique de z.

(d) En déduire les valeurs de $\cos\frac{\pi}{12}$ et $\sin\frac{\pi}{12}$.

Exercice 4. Soit $w=1+\mathrm{i}$.

(a) Déterminer les racines carrées de w en forme cartésienne.

(b) Déterminer les formes exponentielle et trigonométrique de w et ses racines carrées.

(c) En déduire les valeurs de $\cos\frac{\pi}{8}$ et $\sin\frac{\pi}{8}$.

Exercice 5. Résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations suivantes :

(a) $z^2-\mathrm{i}z+2=0$, (b) $(3-\mathrm{i})z^2+(4\mathrm{i}-2)z-8\mathrm{i}+4=0$,

(c) $z^2+2\mathrm{i}z-1=0$, (d) $z(z-\mathrm{i})=\mathrm{i}z+2$,

(e) $z^2-3z+3+\mathrm{i}=0$, (f) $z^4+2z^3+4z^2=0$,

(g) $z^3-3z^2+4z-2=0$.

Exercice 6. Exprimer comme produit de facteurs linéaires les polynômes suivants :

(a) $\mathrm{i}z^2-1$, (b) z^2-3z+2,

(c) z^4+1, (d) $z^4-3\mathrm{i}z^3-(1+3\mathrm{i})z^2$,

(e) z^3+z^2+z+1, (f) $2z^2+\mathrm{i}z-3$,

(g) $z^2-2z+4\mathrm{i}$, (h) $\mathrm{i}z^3+(1-2\mathrm{i})z^2+2(\mathrm{i}-1)z+2$.

Exercice 7. (a) Déterminer les formes trigonométriques et exponentielles des racines 5-èmes de l'unité.

(b) Vérifier que $\mu = \frac{\sqrt{3-\sqrt{5}}+\mathrm{i}\sqrt{5+\sqrt{5}}}{2\sqrt{2}}$ est une racine 5-ème de l'unité.

(c) Déterminer les formes cartésiennes de toutes les racines 5-èmes de l'unité.

(d) En déduire les valeurs de $\cos\frac{\pi}{5}$ et $\sin\frac{\pi}{5}$.

Exercice 8. (a) Remarquer que $e^{\mathrm{i}2\pi/5} = \mu$ de l'exercice précédent.

(b) Écrire sous forme cartésienne $z = e^{\mathrm{i}\pi/3}$.

(c) Écrire μ/z sous forme trigonométrique, exponentielle et cartésienne.

(d) En déduire les valeurs de $\cos\frac{\pi}{15}$ et $\sin\frac{\pi}{15}$.

Exercice 9. Résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations suivantes :

(a) $z^4 + 1 = 0$,

(b) $z^5 + 1 = 0$,

(c) $z^6 = \frac{1+\mathrm{i}\sqrt{3}}{1-\mathrm{i}\sqrt{3}}$,

(d) $\overline{z}^2 - 2\mathrm{i}\overline{z} + \mathrm{i} = 0$,

(e) $z^4 + 2z^2 + 4 = 0$,

(f) $z^6 - 2\mathrm{i}z^3 - 1 = 0$.

À partir de (b), déduire les valeurs de $\cos\frac{\pi}{5}$ et $\sin\frac{\pi}{5}$.

Exercice 10. Déterminer les formes cartésiennes, trigonométriques et exponentielles des racines 4-èmes de $1 + \mathrm{i}\sqrt{3}$. En déduire les valeurs de $\cos\frac{\pi}{12}$ et $\sin\frac{\pi}{12}$.

Exercice 11. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, calculer :

(a) $(1+\mathrm{i})^n + (1-\mathrm{i})^n$,

(b) $(1+\mathrm{i})^n - (1-\mathrm{i})^n$.

Exercice 12. (a) Exprimer $\cos(2\alpha)$ et $\sin(2\alpha)$ en fonction de $\cos\alpha$ et $\sin\alpha$.

(b) Exprimer $\cos\frac{\alpha}{2}$ et $\sin\frac{\alpha}{2}$ en fonction de $\cos\alpha$ et $\sin\alpha$.

(c) En sachant que $\cos\frac{\pi}{5} = \frac{1+\sqrt{5}}{4}$ et $\sin\frac{\pi}{5} = \frac{\sqrt{5-\sqrt{5}}}{2\sqrt{2}}$, en déduire les valeurs de $\cos\frac{\pi}{10}$ et $\sin\frac{\pi}{10}$.

Exercice 13. Exprimer en fonction de $\cos\alpha$ et $\sin\alpha$ les formules trigonométriques suivantes :

(a) $\cos(4\alpha)$,

(b) $\sin(4\alpha)$,

(c) $\cos(5\alpha)$,

(d) $\sin(5\alpha)$,

(e) $\cos(3\alpha)\sin(3\alpha)$,

(f) $\sin(6\alpha)$.

Exercice 14. Linéariser les formules trigonométriques suivantes :

(a) $\cos^5\alpha$,

(b) $\sin^5\alpha$,

(c) $\cos^4\alpha + \sin^4\alpha$,

(d) $\cos^4\alpha - \sin^4\alpha$.

Exercice 15. Exprimer en fonction de $\tan\alpha$ les formules trigonométriques suivantes :

(a) $\cos(4\alpha)$,

(b) $\sin(4\alpha)$,

(c) $\tan(4\alpha)$,

(d) $\tan(5\alpha)$.

Exercice 16. Soient $\alpha \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}^*$. Déterminer la valeur de

$$\sum_{k=0}^{n-1} \sin(k\alpha).$$